令和 3 年度
一般選抜（前期日程）・特別選抜（社会人・帰国生徒・外国人留学生）
「数学」解答例

【解答例】

第 1 問

(1) $a+b+c$ が 9 の倍数となる組合せは次のとおりである。

(i) 1，2，6 の組合せ

(ii) 1，3，5 の組合せ

(iii) 1，4，4 の組合せ

(iv) 2，2，5 の組合せ

(v) 2，3，4 の組合せ

(vi) 3，3，3 の組合せ

(vii) 6，6，6 の組合せ

したがって，(i)，(ii)，(v) のときの順列はそれぞれ $3!=6$ 通り，(iii)，(iv) のときの順列はそれぞれ 3 通り，(vi)，(vii) のときの順列は 1 通りであるので，求める確率は，

$$\frac{6\times 3+3\times 2+1\times 2}{6^3}=\frac{13}{108}$$

(2) $(a-b)(b-c)(c-d)=0$ が成り立つ事象と，$a=b$ または $b=c$ または $c=d$ が成り立つ事象は等しい。これは $a\neq b$ かつ $b\neq c$ かつ $c\neq d$ が成り立つ事象の余事象である。

「$a\neq b$ かつ $b\neq c$ かつ $c\neq d$ が成り立つ」場合の総数は，a の出る目は 6 通り，b は a で出た目をのぞく 5 通り，c は b の出た目をのぞく 5 通り，d は c の出た目をのぞく 5 通り許されることから 6×5^3 通りである。以上より，求める確率は，

$$1-\frac{6\times 5^3}{6^4}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

(3) 「$10a+b$」は，a を 10 の位，b を 1 の位として読んだ 2 桁の 10 進数の値と解釈できる。

$|(10a+b)-(10c+d)|\leq 1$ が成り立つためには，10 の位の数が等しくなる必要があるので $a=c$ が成り立ち，1 の位の数 b は d の値によって次の (i)，(ii)，(iii) の場合のいずれかが成り立てばよい：

(i) $b=1$ のとき，$d=1,2$ の 2 通り

(ii) $b=6$ のとき，$d=5,6$ の 2 通り

(iii) $b=2,\cdots,5$ のとき，$d=b-1,b,b+1$ の 3 通り

したがって，$|(10a+b)-(10c+d)|\leq 1$ となる順列は，(i) と (ii) のときはそれぞれ $2\times 6=12$ 通り，(iii) のとき $3\times 6\times 4=72$ 通りであるので，求める確率は，

$$\frac{12+12+72}{6^4}=\frac{2}{27}$$

第２問

(1) $\sin x - \left(x - \dfrac{1}{3!}x^3\right) \geqq 0$ を示せばよい。$f(x) = \sin x - x + \dfrac{1}{3!}x^3$ とおくと，

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad f''(x) = -\sin x + x, \quad f'''(x) = -\cos x + 1$$

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ なので $f'''(x) \geqq 0$ である。$f''(0) = 0$ であり，$f'''(x) \geqq 0$ なので，$f''(x) \geqq 0$ である。同様に $f'(0) = 0$ と $f''(x) \geqq 0$ より $f'(x) \geqq 0$，さらに $f(0) = 0$ と $f'(x) \geqq 0$ より $f(x) \geqq 0$ となる。よって，$x - \dfrac{1}{3!}x^3 \leqq \sin x$ は成り立つ（等式成立は $x = 0$ のとき）。

(2) $x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \sin x \geqq 0$ を示せばよい。$g(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \sin x$ とおくと，

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cos x, \quad g''(x) = -x + \frac{1}{3!}x^3 + \sin x = f(x)$$

$g''(x) = f(x)$ なので，(1) の不等式より $g''(x) \geqq 0$ である。$g'(0) = 0$ と $g''(x) \geqq 0$ より $g'(x) \geqq 0$，さらに $g(0) = 0$ と $g'(x) \geqq 0$ より $g(x) \geqq 0$ となる。よって，$\sin x \leqq x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5$ は成り立つ（等式成立は $x = 0$ のとき）。

(3) (1)，(2) の不等式が成立することから，

$$x - \frac{1}{3!}x^3 \leqq \sin x \leqq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

である。辺々に $-x$ を加えると，

$$-\frac{1}{3!}x^3 \leqq \sin x - x \leqq -\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

となる。つづいて，題意より $x > 0$ であることに注意して，辺々を x^3 で割ると，

$$-\frac{1}{3!} \leqq \frac{\sin x - x}{x^3} \leqq -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2$$

となる。

$$\lim_{x \to +0}\left(-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x \to +0}\left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2\right) = -\frac{1}{6}$$

なので，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ である。

第３問

(1) I_1, I_2 はそれぞれ以下の通り。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{2x + \sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(2) $n \geqq 3$ に対して，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (\sin x)' \, dx \\ &= \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

したがって，

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つ。

(3) $J_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$ とする。$t = \sin x$ と変数変換することにより，

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^n \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx = I_{2n+1}$$

(2) より，

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n \cdot (2n-2)}{(2n+1) \cdot (2n-1)} I_{2n-3} = \cdots = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 3} I_1$$

が成り立つので，(1) より，

$$J_n = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \cdots \cdot 3}$$

である。

ここで (2) より，$\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{I_{2n+3}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$，すなわち，$J_n > J_{n+1}$ であることに注意すると，

$$J_4 = \frac{128}{315} \ (\fallingdotseq 0.406) > \frac{2}{5} > J_5 = \frac{256}{693} \ (\fallingdotseq 0.369)$$

となるので，求める最小の自然数 n は 5 である。

第４問

(1) $\omega=-\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+1}{-1+i+1}=i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$ $(=z)$ である。極形式で表示すると，

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

であるので，ド・モアブルの定理より，

$$\omega^{10}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{10}=\frac{1}{2^5}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+i\sin\frac{30\pi}{4}\right)=\frac{1}{32}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{i}{32}$$

(2) $\omega=-\dfrac{z+1}{2z+1}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2z+1}$ より，$z=-\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}$ である。また $|z|=1$ より，

$$\begin{aligned}\left|-\frac{\omega+1}{2\omega+1}\right| &=1\\ \text{よって，}\quad(\omega+1)(\overline{\omega}+1) &=(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)\\ 3\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega}) &=0\\ \left(\omega+\frac{1}{3}\right)\left(\overline{\omega}+\frac{1}{3}\right) &=\frac{1}{9}\\ \left|\omega+\frac{1}{3}\right| &=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

したがって，ω は中心 $-\dfrac{1}{3}$，半径 $\dfrac{1}{3}$ の円周上にあるといえる。

(3) 点 z は $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，すなわち $|2z+1|=1$ を満たす。これを用いれば，

$$\begin{aligned}z-\omega &= z+\frac{z+1}{2z+1}\\ &= z+\frac{(z+1)(2\overline{z}+1)}{|2z+1|^2}\\ &= z+(z+1)(2\overline{z}+1)\\ &= z+2|z|^2+z+2\overline{z}+1\\ &= 2|z|^2+2(z+\overline{z})+1\end{aligned}$$

となる。上式第２項の $z+\overline{z}$ は z の実部の２倍，すなわち実数であることから，$z-\omega$ は実数である。