# 令和 5 年度
# 一般選抜（前期日程）・特別選抜（社会人・帰国生徒・外国人留学生）
# 「数学」解答例

## 第 1 問

(1) 白玉 10 個と赤玉 5 個は同じ色どうし区別して考えてもよいが，ここでは白玉 10 個と赤玉 5 個は同じ色どうし区別しないで考える。15 個の玉をすべて取り出して一列に左から右へ順に並べたとき，白玉赤玉の並び方は全部で ${}_{15}C_5$ 通りあり，このどれもが同様に確からしく起こる。列の左から 5 番目の位置にはじめて赤玉が並ぶ総数は，1 番目から 4 番目の位置に白玉が並び，6 番目から 15 番目の位置のどれか 4 つに赤玉が並ぶ総数を考えればよいので ${}_{10}C_4$ 通りある。したがって，求める確率は，

$$\frac{{}_{10}C_4}{{}_{15}C_5} = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \underline{\frac{10}{143}}$$

となる。

(2) (1) と同様に白玉 10 個と赤玉 5 個は同じ色どうし区別しないで考える。列の左から $n$ 番目の位置に 3 個目の赤玉が並ぶのは，1 番目から $n-1$ 番目のどれか 2 つの位置が赤玉になり，また，$n+1$ 番目から 15 番目のどれか 2 つの位置が赤玉になるので，その並び方の総数は ${}_{n-1}C_2 \cdot {}_{15-n}C_2$ 通りある。したがって，列の左から $n$ 番目の位置に 3 個目の赤玉が並ぶ確率 $P_n$ は

$$P_n = \frac{{}_{n-1}C_2 \cdot {}_{15-n}C_2}{{}_{15}C_5} = \frac{(n-1)(n-2)(14-n)(15-n)}{12012}$$

となる。したがって，$3 \leqq n \leqq 12$ に対して，

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n(13-n)}{(n-2)(15-n)}$$

が成り立つ。また，$P_n > P_{n+1} \iff \dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \iff \dfrac{n(13-n)}{(n-2)(15-n)} < 1 \iff n > \dfrac{15}{2}$ であること，同様に $P_n < P_{n+1} \iff n < \dfrac{15}{2}$ であることから，

$$P_3 < \cdots < P_7 = \frac{20}{143} < P_8 = \frac{21}{143} > P_9 = \frac{20}{143} > \cdots > P_{13}$$

より，求める $n$ は $\underline{8}$，そのときの確率は $P_8 = \underline{\dfrac{21}{143}}$ である。

(3) (1) と同様に白玉 10 個と赤玉 5 個は同じ色どうし区別しないで考える。ちょうど 3 個連続して赤玉が並ぶ場合の総数を，次の (i)，(ii)，(iii) に場合分けして考える。

(i) 列の左から 1 番目から 3 番目の位置に連続して赤玉が並ぶ場合
4 番目の位置には必ず白玉が並び，5 番目から 15 番目の位置のどれか 2 つで赤玉になるので，その並べ方の総数は ${}_{11}C_2$ 通りである。

(ii) 列の左から 13 番目から 15 番目の位置に連続して赤玉が並ぶ場合
12 番目の位置には必ず白玉が並び，1 番目から 11 番目の位置のどれか 2 つで赤玉になるので，その並べ方の総数は ${}_{11}C_2$ 通りである。

(iii) 列の左から $m$ 番目から $m+2$ 番目 $(2 \leqq m \leqq 12)$ の位置に連続して赤玉が並ぶ場合
赤玉をちょうど 3 個連続して並ぶためには，その前後の位置では必ず白玉が並ぶ必要があることから，並べ方の総数はこの「白赤赤赤白」の並びを青玉とみなし，青玉 1 個，赤玉 2 個，白玉 8 個の並び方の総数を考えればよい。したがって，その並べ方の総数は $\dfrac{11!}{1!2!8!}$ 通りである。

以上より，求める確率は

$$\frac{2\cdot{}_{11}C_2+\frac{11!}{1!2!8!}}{{}_{15}C_5}=\frac{605}{3003}=\underline{\frac{55}{273}}$$

である。

(4) (1) と同様に白玉 10 個と赤玉 5 個は同じ色どうし区別しないで考える。$Q_n$ は

$$\frac{P(\text{ちょうど 3 個連続して赤玉が並び，その 3 個連続した最後の赤玉が列の左から } n \text{ 番目の位置にある})}{P(\text{ちょうど 3 個連続して赤玉が並ぶ})}$$

である。ここで次の (i)，(ii)，(iii) に場合分けして $Q_n$ を求める。

(i) $n=3$ の場合

ちょうど 3 個連続して赤玉が並び，その 3 個連続した最後の赤玉が列の左から 3 番目の位置となるには，列の左から 1 番目から 4 番目は「赤赤赤白」と玉が並び，残りの 5 番目から 15 番目の位置の玉の並びは赤白のどちらでもよいので，その並び方の総数を考えると，${}_{11}C_2$ 通りである。したがって，(3) の結果を用いると，

$$Q_3=\frac{\frac{55}{3003}}{\frac{55}{273}}=\frac{1}{11}$$

となる。

(ii) $n=15$ の場合

ちょうど 3 個連続して赤玉が並び，その 3 個連続した最後の赤玉が列の左から 15 番目の位置となるには，(i) の場合と同様に考えればよいので，その並べ方の総数は (i) と同じ ${}_{11}C_2$ 通りである。したがって，(3) の結果を用いると，

$$Q_{15}=\frac{\frac{55}{3003}}{\frac{55}{273}}=\frac{1}{11}$$

となる。

(iii) $4\leqq n\leqq 14$ の場合

ちょうど 3 個連続して赤玉が並び，その 3 個連続した最後の赤玉が列の左から $n$ 番目の位置となるには，$n-3$ 番目から $n+1$ 番目の玉の並びは「白赤赤赤白」とならなければならない。したがって，並べ方の総数は残りの 10 箇所のどこに赤玉を並べれば良いかを考えれば良いので，${}_{10}C_2$ 通りである。したがって，(3) の結果を用いると，$4\leqq n\leqq 14$ に対して，

$$Q_n=\frac{\frac{15}{1001}}{\frac{55}{273}}=\frac{9}{121}$$

となる。

以上より，$Q_n$ が最大となる $n$ は $\underline{3,\ 15}$ であり，その確率は $Q_3=Q_{15}=\underline{\frac{1}{11}}$ である。

## 第２問

(1) $\mathrm{P}_{n+1}$ は線分 $\mathrm{OQ}_n$ の中点であり，$\mathrm{Q}_n$ は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{B}$ を $2:1$ に内分する点であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$はそれぞれ下記のように表すことができる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots②$$

である。①と②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \underline{\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots③$$

となる。

(2) ③に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} - \vec{c} = \dfrac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - \vec{c})$ を考えると，$\vec{c} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。よって，③は下記のように変形できる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} - \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで，$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ とすると，$\mathrm{P}_1 = \left(\dfrac{1}{2}s, \dfrac{1}{2}t\right)$ および

$$x_{n+1} - \frac{2}{5}v = \frac{1}{6}\left(x_n - \frac{2}{5}v\right)$$

$$y_{n+1} - \frac{2}{5}w = \frac{1}{6}\left(y_n - \frac{2}{5}w\right)$$

より，数列 $\left\{x_n - \dfrac{2}{5}v\right\}$，$\left\{y_n - \dfrac{2}{5}w\right\}$ はそれぞれ初項 $\dfrac{1}{2}s - \dfrac{2}{5}v$，公比 $\dfrac{1}{6}$ の等比数列，初項 $\dfrac{1}{2}t - \dfrac{2}{5}w$，公比 $\dfrac{1}{6}$ の等比数列とみなすことができる。よって，

$$x_n = \underline{\frac{1}{6^{n-1}}\left(\frac{1}{2}s - \frac{2}{5}v\right) + \frac{2}{5}v} \qquad \cdots\cdots④$$

$$y_n = \underline{\frac{1}{6^{n-1}}\left(\frac{1}{2}t - \frac{2}{5}w\right) + \frac{2}{5}w} \qquad \cdots\cdots⑤$$

である。

(3) $n \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{6^{n-1}} \to 0$ であるため，④，⑤から

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{5}v \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{2}{5}w \qquad \cdots\cdots⑦$$

を得る。次に②と⑥，⑦より，$\mathrm{Q}_n(x'_n, y'_n)$ とすれば，

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}v\right) = \frac{2}{15}v + \frac{2}{3}v = \frac{4}{5}v \qquad \cdots\cdots⑧$$

$$\lim_{n\to\infty} y'_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}w\right) = \frac{2}{15}w + \frac{2}{3}w = \frac{4}{5}w \qquad \cdots\cdots⑨$$

となる。⑥，⑦，⑧，⑨より $\mathrm{P}_n$ と $\mathrm{Q}_n$ の極限が $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{5}v, \dfrac{2}{5}w\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{5}v, \dfrac{4}{5}w\right)$ であることから，$\triangle\mathrm{OAP}$，$\triangle\mathrm{ABQ}$ の面積は，それぞれ $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の $\dfrac{2}{5}$ と $\dfrac{1}{5}$ となる。$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ は $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の $\dfrac{2}{5}$ であることから，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}|tv - sw| = \underline{\frac{1}{5}|tv - sw|}$$

となる。

## 第３問

(1) $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ とおく。部分積分を繰り返すと，

$$I=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=\big(e^{-\pi}-e^{\pi}\big)-I$$

より，

$$I=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)$$

である。一方，$J=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおいて部分積分をすると，

$$J=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=(e^{-\pi}-e^{\pi})-I=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)=I$$

である。よって，

$$F(a)=aI-(2a+1)J=aI-(2a+1)I=\underline{-\frac{(a+1)}{2}(e^{-\pi}-e^{\pi})}$$

となる。

(2) $b=2(a+1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}(a\sin x+b\cos x)^2&=a^2\sin^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2(1-\sin^2 x)\\&=(a^2-b^2)\frac{1-\cos 2x}{2}+ab\sin 2x+b^2\\&=\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2x+ab\sin 2x+\frac{a^2+b^2}{2}\end{aligned}$$

となる。ここで，変数変換 $y=2x$ を行うことにより，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}I,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}J$$

であることがわかる。よって，

$$\begin{aligned}G(a)&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}(a\sin x+b\cos x)^2\,dx\\&=\frac{b^2-a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\cos 2xdx+ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\sin 2xdx+\frac{a^2+b^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}dx\\&=\frac{b^2-a^2}{8}(e^{-\pi}-e^{\pi})+\frac{ab}{4}(e^{-\pi}-e^{\pi})-\frac{a^2+b^2}{4}(e^{-\pi}-e^{\pi})=\underline{-\frac{3a^2+4a+4}{8}(e^{-\pi}-e^{\pi})}\end{aligned}$$

となる。

(3) $G(a)=-\dfrac{3a^2+4a+4}{8}(e^{-\pi}-e^{\pi})$ は $3a^2+4a+4=3\left(a+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}\neq 0$ より，$G(a)\neq 0$ である。$H(a)=\dfrac{F(a)}{G(a)}$ とする。(1)，(2) の結果より，

$$H(a)=\frac{4(a+1)}{3a^2+4a+4}$$

である。ここで，

$$H'(a)=-\frac{12a(a+2)}{(3a^2+4a+4)^2}$$

より，$H'(a)=0$ となるのは $a=0$ と $a=-2$ である。増減表は，次のとおりとなる。

| $a$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $H'(a)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $H(a)$ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ |

よって，$a=-2$ のとき極小となり極小値は $-\dfrac{1}{2}$，$a=0$ のとき極大となり極大値は $1$ である。ここで，

- $a<-2$ のとき，$H(a)<0$ であり $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} H(a)=0$
- $a>0$ のとき，$H(a)>0$ であり $\displaystyle\lim_{a\to\infty} H(a)=0$

となることから，$\underline{a=-2 \text{ のとき最小値 } -\dfrac{1}{2}，a=0 \text{ のとき最大値 } 1}$をとる。

## 第４問

(1) 与式は左辺を整理すると，

$$\frac{(z_1-\overline{z_1})^2}{z_1\overline{z_1}}=-\operatorname{Im}(z_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。ここで $z_1=x+yi$ （$x$ および $y$ は実数）とおいて式①に代入すると，

$$\frac{-4y^2}{x^2+y^2}=-y$$

となる。整理すると，

$$y(x^2+(y-2)^2-4)=0$$

である。$\operatorname{Im}(z_1)\neq 0$ から $y\neq 0$ なので，

$$x^2+(y-2)^2=4$$

となる。よって，条件を満たす点 $z_1$ の全体は，点 $2i$ を中心とする半径 2 の円を描く。ただし，原点を除く。

(2) 原点を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円上の点を $z$ とする。複素数平面上の点を $x+yi$ と表すと，点 $z_1$ による円と点 $z$ による円は，

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$$

であり，この連立方程式を解くと $(x,y)=(\pm 2,2)$ となる。

$y$ は $z$ の虚部であり，$z$ を極形式で表すと $2\sqrt{2}\,(\cos\theta+i\sin\theta)$ なので，

$$2\sqrt{2}\sin\theta=2$$

すなわち，

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。よって，$0\leqq\theta<2\pi$ において共有点の偏角 $\theta$ は $\dfrac{\pi}{4}$ および $\dfrac{3\pi}{4}$ である。

(3) $z_2=x+yi$ とおき，与式の両辺を 2 乗すると，

$$(x-1)^2+(y-a)^2=x^2+(y-a-1)^2$$

となる。この式を整理すると，$y=x+a$ となり，この図形が直線であることが分かる。

点 $z_2$ による直線が点 $z_1$ による円と共有点を持つので，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=4 \\ y=x+a \end{cases}$$

を整理すると，

$$2x^2+(2a-4)x+a^2-4a=0$$

となる。共有点を持つので，この式の判別式 $D$ が 0 以上であればよい。したがって，

$$D=(2a-4)^2-8(a^2-4a)\geqq 0$$

すなわち，

$$a^2-4a-4\leqq 0$$

となる。これを解くと，$a$ の範囲は $2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2+2\sqrt{2}$ となる。なお，$a=0$ のとき，直線 $y=x$ は原点を通る。原点は (1) の図形に含まれないが，直線 $y=x$ は (1) の図形と点 (2, 2) を共有するので，$a=0$ も求める範囲に含まれる。