令和７年度一般選抜 (前期日程)・特別選抜 (社会人・帰国生徒・外国人留学生)「数学」解答例

第１問

(1) 出る目の最小値が 3 以上ということは，n 回のすべてで $3,4,5,6$ のいずれかの目が出ればよいということなので，求める確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^n = \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(2) n 回のすべてで $1,2,3,4$ のいずれかが出る事象を A，n 回のうち少なくとも 1 回は 4 が出る事象を B とすると，求めたい確率は，$P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap\overline{B})$ である。$A\cap\overline{B}$ は n 回のすべてで $1,2,3$ のいずれかが出る事象であるため，$P(A)$, $P(A\cap\overline{B})$ はそれぞれ，

$$P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad P(A\cap\overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。よって，確率 p_n は以下のとおりである。

$$p_n = P(A\cap B) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

次に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1}$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}$ を求めればよい。
ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$ は初項 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$，公比 $\frac{2}{3}$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ は初項 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数である。
公比について，$\left|\frac{2}{3}\right| < 1, \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ であるから，この 2 つの無限等比級数はともに収束し，それぞれの和は,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

となる。よって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\frac{5}{6}}$$

(3) $Q = (x_1-2)^2(x_2-2)^2\cdots\cdots(x_n-2)^2$ とおく。
各項 $(x_i-2)^2$ の取る値は $0, 1, 4, 9, 16$ のいずれかであるため，$Q=36$ が成り立つのは，$(x_i-2)^2$ が 4 と 9 の値を 1 回ずつ，その他は 1 の値を取る場合である。ここで，$(x_i-2)^2=4$ となるのは $x_i=4$ のとき，$(x_i-2)^2=9$ となるのは $x_i=5$ のときである。そして，$(x_i-2)^2=1$ となるのは $x_i=1,3$ のときである。従って，$Q=36$ が成り立つのは，4 と 5 のさいころの目が 1 回ずつ出て，残りは 1 または 3 の目が出る場合である。
n 回のうち，4 と 5 が 1 回ずつ出る確率は，${}_n\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}\times{}_{n-1}\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}$ であり，残りの $n-2$ 回のすべてで 1 または 3 の目が出る確率は，$\left(\frac{2}{6}\right)^{n-2}$ である．よって，$Q=36$ となる確率は,

$${}_n\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}\times{}_{n-1}\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^{n-2} = \underline{\frac{n(n-1)}{4\cdot 3^n}}$$

第２問

(1) 準線 $y=-p$, 焦点 $(0,p)$ の放物線の方程式の標準形は $x^2=4py$ であり，$p=-\frac{a^2}{8}$ においては $x^2=-\frac{a^2}{2}y$ である。放物線 C はこれを x 軸方向に a だけ平行移動したものであるので x を $x-a$ に置き換えると，$(x-a)^2=-\frac{a^2}{2}y$ と書けて，これを整理すると $-\frac{2}{a^2}(x-a)^2=y$ となる。以上より，放物線 C の方程式は

$$y=-\frac{2}{a^2}(x-a)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

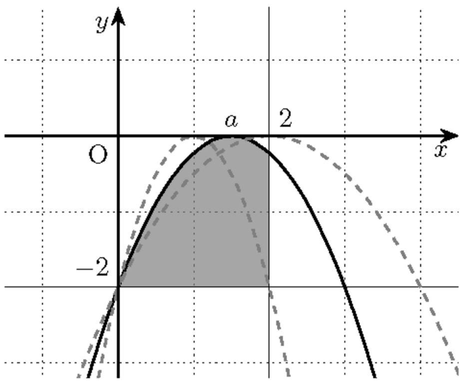
(2) 求める接線の式を $y=Ax+B$ とすると，接線の傾き A は式①を x で微分して，$A=-\frac{4x}{a^2}+\frac{4}{a}$ であり，接点の x 座標が $x=\frac{a}{2}$ なので，$A=\frac{2}{a}$ となる。

放物線 C と接線の共有点は式①に $x=\frac{a}{2}$ を代入して，$\left(\frac{a}{2},-\frac{1}{2}\right)$ と求まる。これを接線の方程式に代入してまとめると，接線の切片は $B=-\frac{3}{2}$ となる。

以上より，接線の方程式は，$y=\frac{2}{a}x-\frac{3}{2}$ となるが，この直線が点 $(2,2)$ を通るので，これを代入して a について解くと，$\underline{a=\frac{8}{7}}$ となる。

(3) 放物線 C の方程式①から，その頂点は $(a,0)$ にあり，上に凸である。

式①に $y=-2$ を代入して x について解くと，放物線 C は $x=0$ および $x=2a$ で直線 $y=-2$ と交点を持つ。$x=0$ のときは，a によらず $(0,-2)$ が交点となる。$x=2a$ のときは，$1\leqq a\leqq 2$ なので，$2\leqq x\leqq 4$ であり，$x\leqq 2$ における直線 $y=-2$ との交点は $(2,-2)$ のみである。式①に $x=2$ を代入すれば，$y=-\frac{2}{a^2}(2-a)^2$ である。$1\leqq a\leqq 2$ なので，$-2\leqq y\leqq 0$ となり，この範囲で放物線 C は直線 $x=2$ と交点を持つ。これは $(2,-2)$ も含む。



以上より，連立不等式の表す領域の面積 S は，積分範囲を $0\leqq x\leqq 2$ としてよいから，次式のように表すことができる。

$$S=\int_0^2\left(-\frac{2}{a^2}(x-a)^2-(-2)\right)dx \ =\left[-\frac{2}{3a^2}x^3+\frac{2}{a}x^2\right]_0^2=-\frac{16}{3a^2}+\frac{8}{a}$$

S を a で微分して，

$$S'=\frac{32}{3a^3}-\frac{8}{a^2}=-\frac{8}{a^3}\left(a-\frac{4}{3}\right)$$

となるので，次の増減表から $1\leqq a\leqq 2$ においては，$\underline{a=\frac{4}{3}\text{ のときに } S \text{ が最大値 } 3}$ となる。

a	1	$\cdots\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots\cdots$	2
S'		$+$	0	$-$	
S	$\frac{8}{3}$	↗	3	↘	$\frac{8}{3}$

第３問

(1) L の定義より D は線分 EL の中点となる。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{OL}}}{2}$$

となり，したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \underline{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

である。M は線分 OB の中点であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \underline{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

である。また N の定義より，B は FN の中点となる。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}}{2}$$

となり，したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \underline{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

となる。

(2) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0$ となる。よって，(1) より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = 0$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 0$$

すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ である。

また，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}} = 0$ となることから，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = 0$$

となる。よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 0$$

となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であることから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 0$$

すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ となる。

以上より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

となり，線分 OA，OB，OC を辺にもつ直方体は立方体である。

(3) 線分 OA，OB，OC を辺にもつ直方体は立方体であることから，各面の対角線の長さは等しい。すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OF}}| = |\overrightarrow{\mathrm{EF}}|$ となり，△OEF は正三角形である。ここで $|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OF}}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であることから，求める面積は

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OE}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

となる。

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \cos^2 t\cos^2 2t + \sin^2 t + \cos^2 t\sin^2 2t = 1$$

であることから，

$$S = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

である。