令和８年度一般前期数学解答例

第１問

(1) $\dfrac{2}{(x-3)(x+3)}$

(2) -14

(3) $831,600$ とおり

(4) $\sqrt{3}$

(5) 23 桁

(6) $a_n = \dfrac{2}{5}\{1-(-4)^{n-1}\}$

第２問

(1) 加法定理および部分積分法より，

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\cos 3\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\sin 2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)'\cos 2\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\sin 2\theta\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\sin 2\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\sin 2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{-\frac{3}{16}}
\end{aligned}
$$

(2) 加法定理および部分積分法より，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n-1}\theta\cos\theta\cos n\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n\theta\sin n\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{n}\sin^n\theta\right)'\cos n\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n\theta\sin n\theta\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{n}\sin^n\theta\cos n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n\theta\sin n\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n\theta\sin n\theta\, d\theta \\
&= \underline{\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}
\end{aligned}
$$

(3) (2) より，自然数 k に対して，

$$
\begin{aligned}
I_{6k} &= \frac{1}{6k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}, & I_{6k-1} &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{6k-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k-1}, \\
I_{6k-2} &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{6k-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k-2}, & I_{6k-3} &= -\frac{1}{6k-3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k-3}
\end{aligned}
$$

より，

$$
a_k = \frac{I_{6k-2}I_{6k-1}}{I_{6k}I_{6k-3}} = \frac{1}{4}\,\frac{6k(6k-3)}{(6k-2)(6k-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1\cdot\left(1-\dfrac{3}{6k}\right)}{\left(1-\dfrac{2}{6k}\right)\left(1-\dfrac{1}{6k}\right)}
$$

となる。したがって，

$$
\lim_{k\to\infty} a_k = \underline{\frac{1}{4}}
$$

である。

第3問

(1) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ を $w=(z+1)^2$ に代入して，

$$\begin{aligned}w&=(z+1)^2\\&=(\cos\theta+1+i\sin\theta)^2\\&=(\cos\theta+1)^2-\sin^2\theta+2i(\cos\theta+1)\sin\theta\\&=(\cos^2\theta+2\cos\theta+1-\sin^2\theta)+2i(\cos\theta+1)\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta+2\cos\theta)+2i(\cos\theta+1)\sin\theta\\&=2(\cos\theta+1)\cos\theta+2i(\cos\theta+1)\sin\theta\\&=2(\cos\theta+1)(\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$

より，$\underline{|w|=2(\cos\theta+1)}$

(2) (1) より，$x(\theta), y(\theta)$ はそれぞれ

$$\begin{cases}x(\theta)=2(1+\cos\theta)\cos\theta\\y(\theta)=2(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases}x'(\theta)=-2(\sin\theta+\sin2\theta)=-2(1+2\cos\theta)\sin\theta\\y'(\theta)=2(\cos\theta+\cos2\theta)=2(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)\end{cases}$$

である。$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $x'(\theta)=0$ とすると $\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\pi$. また，$y'(\theta)=0$ とすると $\theta=\dfrac{\pi}{3},\pi$ を得る。$0<\theta<\pi$ で，$\sin\theta>0,\ 1+\cos\theta>0$ であるので，$x'(\theta),\ y'(\theta)$ の符号はそれぞれ $-(1+2\cos\theta),\ (-1+2\cos\theta)$ で決まることに注意して，それぞれの関数の増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$x'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(\theta)$	4	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$y'(\theta)$	4	$+$	0	$-$	0
$y(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

したがって，$x(\theta)$ は $\underline{\theta=0\text{ のとき，最大値 }4}$ をとり，$\underline{\theta=\dfrac{2\pi}{3}\text{ のとき，最小値 }-\dfrac{1}{2}}$ をとる。

また，$y(\theta)$ は $\underline{\theta=\dfrac{\pi}{3}\text{ のとき，最大値 }\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとり，$\underline{\theta=0,\pi\text{ のとき，最小値 }0}$ をとる。

(3) (2) より，C と実軸との共有点は $\theta=0$ のとき $w=4,\ \theta=\pi$ のとき $w=0$ である。

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $x(\theta)$ が最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ について $y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y(\theta)$ が最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ について $x\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$ であるので，C は 2 点 $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を通る。また，$x(\theta)=0$ のとき，$1+\cos\theta=0$ または $\cos\theta=0$ なので $\theta=\pi,\ \dfrac{\pi}{2}$ で，$y(\pi)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ となり，C は 0 と $2i$，そして実軸に関する対称性より $-2i$ で虚軸と共有点を持つ。以上を考慮すると，図形 C の概形は以下の通りである。